10.3.1 Primitivní funkce

Předpoklady: 10204

V předchozí kapitole jsme k funkcím hledali jejich derivace. Například k funkci $y = x^3$ jsme našli funkci $y' = 3x^2$. Říkali jsme, že funkce $y' = 3x^2$ je derivací funkce $y = x^3$ (vycházeli jsme od funkce $F(x) = x^3$ a získali jsme funkci $F'(x) = f(x) = 3x^2$).

$\Rightarrow$ vztah můžeme také obrátit (připomíná to zavádění inverzních funkcí): máme funkci $f(x) = 3x^2$ a hledáme funkci $F(x)$, pro kterou je funkce $f(x) = 3x^2$ derivací. Zřejmě platí $F(x) = x^3$, protože $F'(x) = (x^3)' = 3x^2$. Funkci $F(x)$ říkáme **primitivní funkce k funkci** $f(x)$.

Nechť jsou dány funkce *F*, *f* definované v otevřeném intervalu *J*. Jestliže pro všechna $x \in J$ platí $F'(x) = f(x)$, říkáme, že **funkce *F* je primitivní funkcí k funkci *f* v intervalu *J*.**

Př. 1: Najdi primitivní funkci k funkci $y = 2x$. Kolik takových funkcí existuje?

Víme, že platí: $(x^2)' = 2x \Rightarrow$ pro funkci $y = 2x$ je primitivní funkcí funkce $y = x^2$.

Existuje i další primitivní funkce k funkci $y = 2x$?

- Nápad $y = x^2 + 1$. Ověříme derivováním $(x^2 + 1)' = 2x + 0 = 2x \Rightarrow y = x^2 + 1$ je primitivní funkce k funkci $y = 2x$.
- Nápad $y = x^2 - \pi$. Ověříme derivováním $(x^2 - \pi)' = 2x + 0 = 2x \Rightarrow y = x^2 - \pi$ je primitivní funkce k funkci $y = 2x$.

$\Rightarrow$ Zřejmě každá funkce $y = x^2 + C$ je primitivní k funkci $y = 2x$.

Zderivujeme: $(x^2 + C)' = 2x + 0 = 2x$.

K funkci $y = 2x$ existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí ve tvaru $y = x^2 + C$, kde $C \in R$.

Nejen, že všechny funkce $y = x^2 + C$ jsou primitivní k $y = 2x$, ale navíc všechny primitivní funkce k funkci $y = 2x$ mají tvar $y = x^2 + C$.

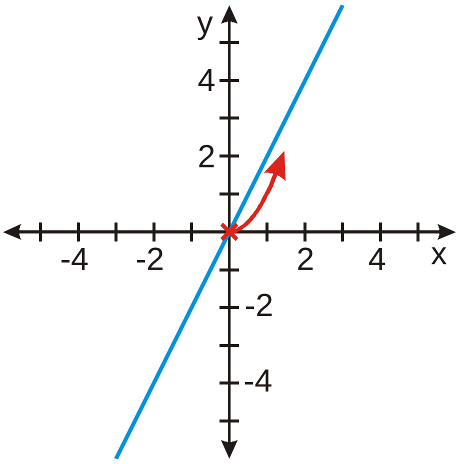
Je-li funkce *F* v intervalu *J* primitivní funkcí k funkci *f*, pak každá primitivní funkce k funkci *f* je tvaru $F(x) + C$, kde $C \in R$.

Důkaz: Předpokládáme, že *F* a *G* jsou dvě primitivní funkce k *f* v intervalu *J* $\Rightarrow$ platí: $F'(x) = G'(x) = f(x)$.

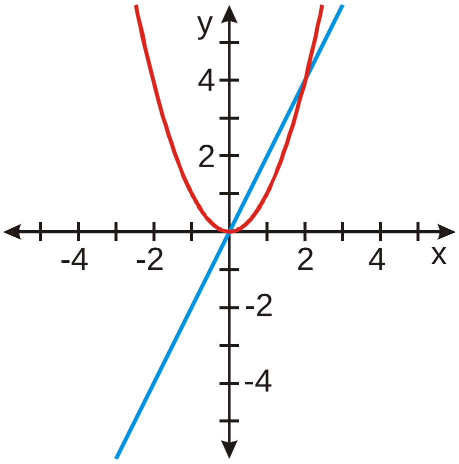
Zavedeme funkci $H(x) = F(x) - G(x)$.

$H'(x)=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0 \Rightarrow H(x)=C$ (jiná funkce se nezderivuje na nulu)
Dosadíme: $H(x)=C=F(x)-G(x) \Rightarrow F(x)=G(x)+C$

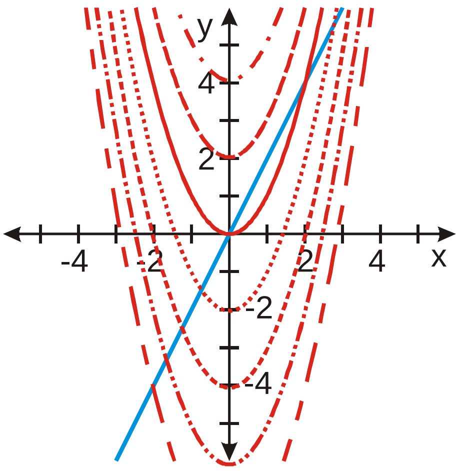
Nekonečné množství primitivních funkcí, které se liší o konstantu není překvapivé:
Známe funkci $y=2x$ - derivaci primitivní funkce, kterou máme najít $\Rightarrow$ víme, jak se mění hodnoty funkce, kterou hledáme $\Rightarrow$ stoupneme si do nějakého bodu (například $[0;0]$) a začneme červenou křivku kreslit (čím více vpravo kreslíme, tím rychleji musí funkce růst).



Když dokreslíme zbytek funkce získáme graf funkce $y=x^2$.



Při kreslení funkce máme pevně daný každý pohyb tužkou (funkce $y=2x$ udává sklon našeho kreslení v každém bodě) kromě počátečního bodu, kde jsme začali kreslit $\Rightarrow$ pokud budeme začínat v různých bodech získáme stejné křivky, ale různě posunuté ve svislém směru - křivky, které můžeme zapsat jako $y=x^2+C$:



Názvosloví a značení:

- obecně: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$
- konkrétně: $\int 2x\,dx = x^2 + C$

$\int$ - integrační znak (pozůstatek sumy), $f(x)$ - integrand, dx - integrační proměnná, C integrační konstanta

- hledání primitivní funkce = **integrování** (**integrace**) funkce f

nebo jinak:

- $\int f(x)\,dx$ - **neurčitý integrál**
- hledání primitivní funkce = výpočet neurčitého integrálu

Primitivní funkce není nic vzácného:
Ke každé funkci spojité v intervalu *J* existuje v tomto intervalu primitivní funkce.

$\Rightarrow$ můžeme začít hledat:

Př. 2: Urči $\int (x+2)\,dx$.

Hledáme primitivní funkci k funkci x $\Rightarrow$ zřejmě $\frac{x^2}{2}$ $\Rightarrow$ zkusíme $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{2x}{2} = x$

primitivní funkce k 2 $\Rightarrow$ zřejmě $2x$ $\Rightarrow$ zkusíme $(2x)' = 2$ $\Rightarrow$

$\int x + 2\,dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C$

strašně zdlouhavé, zřejmě musíme objevit vzorce pro výpočet integrálů

Př. 3: Doplň tabulku neurčitých integrálů:

derivace	$(x^2)' = 2x$	$(C)' = 0$	$(x)' = 1$	$(x^n)' = n\,x^{n-1}$
integrace	$\int 2x\,dx = x^2 + C$	$\int 0\,dx =$	$\int 1\,dx = \int dx =$	$\int x^n\,dx =$

první tři vzorečky jsou jasné, čtvrtý musíme odvodit, protože nemáme z derivování žádný vzorec, ve kterém by výsledkem derivování byl výraz x^n.

$\left(x^n\right)' = n x^{n-1}$ $\Rightarrow$ při derivování se mocnina snižuje o jednu $\Rightarrow$ při integrování se mocnina musí o jednu zvětšit $\Rightarrow$ pokus: $\int x^n \, dx = x^{n+1} + C$. Ověříme derivováním: $\left(x^{n+1}\right)' = (n+1) x^n$

$\Rightarrow$ člen $(n+1)$ musíme odstranit zkrácením $\Rightarrow$ $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

derivace	$\left(x^2\right)' = 2x$	$(C)' = 0$	$(x)' = 1$	$\left(x^n\right)' = n x^{n-1}$
integrace	$\int 2x \, dx = x^2 + C$	$\int 0 \, dx = C$	$\int 1 dx = \int dx = x + C$	$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$, $x \in (0;\infty)$

Pedagogická poznámka: Konzultace vzorce $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ se studenty je nutná, se vzorcem mají problémy i velmi nadaní studenti.

Podobně jako u derivací i u integrálů platí věta pro součet integrálů:

Existují-li v otevřeném intervalu *J* primitivní funkce k funkcím f_1, f_2 a jsou-li c_1, c_2 libovolné konstanty, existuje primitivní funkce k funkci $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ a platí:
$\int \left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right] dx = c_1 \int f_1(x) \, dx + c_2 \int f_2(x) \, dx$

Př. 4: Vypočti:

a) $\int \left(x^2 - 2x + 3\right) dx$ b) $\int (x+2)^2 \, dx$ c) $\int \frac{x^5 + 3x^3 - 3}{x^2} dx$

a) $\int \left(x^2 - 2x + 3\right) dx = \int x^2 \, dx - 2\int x \, dx + 3\int dx = \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 3x + C = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$

b) $\int (x+2)^2 \, dx = \int x^2 + 4x + 4 \, dx = \int x^2 \, dx + 4\int x \, dx + 4\int dx = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + C$

c) $\int \frac{x^5 + 3x^3 - 3}{x^2} dx = \int x^3 \, dx + 3\int x \, dx - 3\int x^{-2} \, dx = \frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2} - 3\frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + \frac{3}{x} + C$

Př. 5: Petáková:
strana 163/cvičení 81 a) c) d) g)

Shrnutí: Obráceným postupem k derivování je integrování. Hledáme funkci jejíž derivací je funkce, ze které vycházíme.